Научная статья

УДК 517.5
DOI 10.25205/1560-750X-2024-27-2-40-61

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ НУЛЕВЫМИ СФЕРИЧЕСКИМ СРЕДНИМИ

Наталья Петровна Волчкова[1]
Виталий Владимирович Волчков[2]

[1] Донецкий национальный технический университет, 283000, Донецк, Россия
[2]Донецкий государственный университет, 283001, Донецк, Россия
[1,2]volna936@gmail.com, [1]https://orcid.org/0000-0001-6193-2782
[2]https://orcid.org/0000-0003-4274-0034

Аннотация

В работе продолжено изучение проблемы голоморфности функции, имеющей нулевые контурные интегралы по окружностям. Рассматривается случай, когда функция f задана в шаре из $\mathbb{C}^n$ с проколотым центром, а интегрирование ведется по всем сферам двух фиксированных радиусов, лежащим в этом проколотом шаре $\mathcal{D}$. Установлено, что если $f \in C^{\infty}(\mathcal{D})$, то при некоторых условиях на радиусы и определенных размерах $\mathcal{D}$ можно сделать вывод о голоморфности функции f. Показано, что эти требования в общем случае ослабить нельзя.

Ключевые слова и фразы

теоремы типа Мореры, локальное свойство Помпейю, теоремы о двух радиусах, ряды по бесселевым функциям.

Источник финансирования

Исследование проводилось по теме государственного задания (регистрационный номер 124012400352-6)

Для цитирования

Волчкова Н. П., Волчков В. В. Характеризация голоморфных функций нулевыми сферическими средними, Математические труды, 2024, Т. 27, № 2, С. 40-61. DOI 10.25205/1560-750X-2024-27-2-40-61

CHARACTERIZATION OF HOLOMORPHIC FUNCTIONS BY ZERO SPHERICAL MEANS

Natalya P. Volchkova[1], Vitalii V. Volchkov[2]

[1]Donetsk National Technical University,
283000, Donetsk, Russia

[2]Donetsk State University
283001, Donetsk, Russia

[1,2]volna936@gmail.com, [1]https://orcid.org/0000-0001-6193-2782
[2]https://orcid.org/0000-0003-4274-0034

Abstract

The paper continues to study the holomorphicity problem of a function having zero contour integrals over circles. The case is considered when function f is given in a ball of $\mathbb{C}^n$ with a punctured center, and integration is carried out over all spheres of two fixed radii lying in this punctured ball $\mathcal{D}$. It is established that if $f \in C^{\infty}(\mathcal{D})$, then under certain conditions for radii and certain sizes of $\mathcal{D}$ it can be concluded that the holomorphicity of the function f. It is shown that these requirements cannot be weakened in the general case.

Keywords

Morera-type theorems, local Pompeiu property, two-radius theorems, series in Bessel functions.

Funding

The study was conducted on the topic of a state assignment (registration number 124012400352-6)

For citation

Volchkova N. P., Volchkov V. V. Characterization of holomorphic functions by zero spherical means, Mat. Trudy, 2024, T. 27, № 2, pp. 40-61. DOI 10.25205/1560-750X-2024-27-2-40-61

§ 1. Введение

Проблема голоморфности функции, удовлетворяющей определенным ограничениям, связанным с интегральными средними, изучалась многими авторами (см. [1]–[8] и имеющиеся там ссылки). Хорошо известными примерами таких ограничений являются интегральное условие Мореры, существование "ареолярных производных заданное асимптотическое поведение криволинейных интегралов, обращение в нуль интегральных моментов и др. В классических результатах указанного направления, как правило, предполагается выполнение соответствующего условия для достаточно широкого класса множеств интегрирования (например, для замкнутых кривых сколь угодно малого диаметра, шаров любого радиуса и т.п.). В современных исследованиях произвол в выборе этих множеств существенно ограничен. В частности, в ряде работ рассматривался случай, когда множества интегрирования конгруэнтны фиксированной фигуре относительно некоторой группы преобразований [5], [6], [8]–[12]. Указанный аспект проблемы голоморфности тесно связан с инъективностью интегрального преобразования Помпейю [5], [6].

Определение 1. Пусть $n \geq 2$, $M(n)$ — группа евклидовых движений пространства $\mathbb{R}^n$, $A_1, \dots, A_m$ $(m \geq 1)$ — набор компактов положительной лебеговой меры в $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{D}$ — область в $\mathbb{R}^n$, для которой каждое из множеств $G_{A_j,\mathcal{D}} = \{g \in M(n) : g(A_j) \subset \mathcal{D}\}$ не пусто. Набор $A_1, \dots, A_m$ называется *семейством Помпейю* относительно области $\mathcal{D}$, если всякая локально суммируемая функция $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$, удовлетворяющая условию

$$\int_{g(A_j)} f(x)dx = 0 \quad \forall g \in G_{A_j,\mathcal{D}}, \quad j = 1, \dots, m,$$

является нулевой.

Ряд достаточных условий для множеств Помпейю содержится в обзорах [5], [13] и монографиях [6], [14]. Например, С.А. Вильямсом [15] было доказано, что замыкание всякого открытого ограниченного множества со связным дополнением, имеющего не вещественно аналитическую липшицеву границу, является множеством Помпейю. Хорошо известно также, что два шара с радиусами r_1 и r_2 является семейством Помпейю на $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда r_1/r_2 не является отношением нулей функции Бесселя $J_{n/2}$ (см. [9], [11], а также [10], [12], [16], где установлены локальные аналоги этого результата).

Следующее утверждение (см. [5, § 3, теоремы 3.3, 3.8], [9]), вытекающие из формулы Стокса, показывает связь между голоморфностью и свойством Помпейю.

Теорема А. *Пусть $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_m$ — семейство областей в $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$ $(n \geq 1)$ с кусочно-гладкой границей и их замыкания $\overline{\mathcal{A}}_1, \dots, \overline{\mathcal{A}}_m$ обладают свой-*

ством Помпейю в области $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}^n$. *Если* $f \in C^1(\mathcal{D})$ *и*

$$\int_{\partial(g(A_j))} f(z)\,\Omega_\alpha(z) = 0 \quad \text{при всех} \quad g \in G_{\overline{\mathcal{A}}_j,\mathcal{D}},\ j \in \{1,\dots,m\},\ \alpha \in \{1,\dots,n\}, \tag{1}$$

где $\Omega_\alpha(z) = (-1)^{\alpha-1} d\overline{z}_1 \wedge \ldots \wedge d\overline{z}_{\alpha-1} \wedge d\overline{z}_{\alpha+1} \wedge \ldots \wedge d\overline{z}_n \wedge dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n$, *то функция* f *голоморфна в области* $\mathcal{D}$.

Из теоремы A и известных достаточных условий для множеств Помпейю вытекают различные уточнения классической теоремы Мореры [5], [6], [14].

В данной работе изучается случай, когда $\mathcal{D}$ — шар в $\mathbb{C}^n$ с проколотым центром, $f \in C^\infty(\mathcal{D})$, а интегрирование в (1) ведется по всем сферам двух фиксированных радиусов, лежащим в $\mathcal{D}$. При этом переход к теореме A осуществить нельзя ввиду возможной особенности у функции f в центре $\mathcal{D}$. Показано, что при некоторых условиях на радиусы и определенных размерах $\mathcal{D}$ можно сделать вывод о голоморфности функции f (см. теорему 1 ниже). Отметим, что эти требования в общем случае ослабить нельзя (см. § 2).

§ 2. Формулировка основного результата

Пусть $\langle z, w\rangle$ — эрмитово скалярное произведение векторов $z, w \in \mathbb{C}^n$, $|z| = \sqrt{\langle z, z\rangle}$,

$$\mathcal{B}^{2n}_{a,b} = \{z \in \mathbb{C}^n : a < |z| < b\}, \quad 0 \le a < b,$$

$$\mathcal{B}^{2n}_a(z) = \{w \in \mathbb{C}^n : |w - z| < a\}, \quad \mathcal{S}^{2n-1}_a(z) = \{w \in \mathbb{C}^n : |w - z| = a\},$$

$$\mathcal{B}^{2n}_a = \mathcal{B}^{2n}_a(0), \quad \mathcal{S}^{2n-1}_a = \mathcal{S}^{2n-1}_a(0).$$

Для $n \ge 1$ положим $\mathcal{E}_n = \{\xi_{n,m}/\xi_{n,j} : m, j = 1, 2, \ldots\}$, где $\xi_{n,1}, \xi_{n,2}, \ldots$ — возрастающая последовательность всех положительных нулей функции Бесселя J_n.

Всюду в дальнейшем, все функции, определенные и непрерывные в проколотой окрестности нуля в $\mathbb{C}^n$, допускающие непрерывное продолжение в точку 0, считаются доопределенными в нуле по непрерывности.

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 1. *1) Пусть* $n \ge 1$, $0 < r_1 < r_2$, $r_1/r_2 \notin \mathcal{E}_n$ *и* $R \ge r_1 + r_2$. *Предположим, что* $f \in C^\infty(\mathcal{B}^{2n}_{0,R})$ *и*

$$\int_{\mathcal{S}^{2n-1}_{r_j}(w)} f(z)\,\Omega_\alpha(z) = 0 \tag{2}$$

для всех $w \in \mathcal{B}^{2n}_{R-r_j} \backslash \mathcal{S}^{2n-1}_{r_j}$, $j \in \{1;2\}$, $\alpha \in \{1,\dots,n\}$. *Тогда функция* f *голоморфна в* $\mathcal{B}^{2n}_{0,R}$. *В частности, если* $n \geq 2$, *то* f *голоморфна в* $\mathcal{B}^{2n}_{R}$.

2) если $r_1/r_2 \in \mathcal{E}_n$ *или* $R < r_1 + r_2$, *то существует неголоморфная в* $\mathcal{B}^{2n}_{0,R}$ *функция* $f \in C^\infty(\mathcal{B}^{2n}_R)$, *для которой* (2) *выполнено для всех* $w \in \mathcal{B}^{2n}_{R-r_j}$, $j \in \{1;2\}$, $\alpha \in \{1,\dots,n\}$.

Этот результат влечет известные теоремы типа Мореры, установленные Л. Зальцманом [9], Д. Смитом [10], Л. Брауном, Б.М. Шрайбером, Б.М. Тейлором [11], К.А. Беренстейном и Р. Гэем [12]. Полное решение проблемы голоморфности функции $f \in C(\mathcal{B}^2_R)$, удовлетворяющей условию

$$\int_{\mathcal{S}^1_{r_j}(w)} f(z)\,dz = 0, \quad w \in \mathcal{B}^2_{R-r_j}, \quad j \in \{1;2\},$$

получено в [6, часть 5]. В частности, теорема 5.7 в [6, часть 5] показывает, что условие $f \in C^\infty(\mathcal{B}^{2n}_{0,R})$ в теореме 1 нельзя заменить, вообще говоря, требованием произвольной конечной гладкости функции f на $\mathcal{B}^{2n}_R$.

§ 3. Обозначения и предварительные сведения

Как обычно, символами $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$ обозначаются соответственно множества натуральных, целых и неотрицательных целых чисел. Пусть Δ — оператор Лапласа в $\mathbb{C}^n$, C^ν_m — многочлен Гегенбауэра, T_m — многочлен Чебышева первого рода, Z_ν — функция Бесселя J_ν или функция Неймана N_ν.

Далее будут применяться формулы дифференцирования

$$\frac{d}{dt}\big(t^\nu Z_\nu(t)\big) = t^\nu Z_{\nu-1}(t), \quad \frac{d}{dt}\big(t^{-\nu} Z_\nu(t)\big) = -t^{-\nu} Z_{\nu+1}(t), \tag{3}$$

формула Ломмеля-Ганкеля

$$J_\nu(t)N_{\nu+1}(t) - J_{\nu+1}(t)N_\nu(t) = -\frac{2}{\pi t}, \tag{4}$$

соотношения ортогональности

$$\int_0^1 tJ_n(\xi_{n,m}t)J_n(\xi_{n,j}t)dt = \begin{cases} 0, & m \neq j \\ J^2_{n+1}(\xi_{n,m})/2, & m = j, \end{cases} \tag{5}$$

асимптотические разложения

$$\xi_{n,m} = \pi\left(m + \frac{2n-1}{4}\right) + O\left(\frac{1}{m}\right), \quad m \to +\infty, \tag{6}$$

$$J_\nu(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\left(\cos\left(t-\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\Big(\frac{1}{t}\Big)\right),\quad t\to+\infty,\tag{7}$$

$$N_\nu(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\left(\sin\left(t-\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\Big(\frac{1}{t}\Big)\right),\quad t\to+\infty,\tag{8}$$

а также следующие теоремы сложения Гегенбауэра:

$$\frac{Z_\nu\big(|z-w|\big)}{|z-w|^\nu}=2^\nu\Gamma(\nu)\sum_{m=0}^{\infty}(\nu+m)\frac{Z_{\nu+m}\big(|z|\big)}{|z|^\nu}\frac{J_{\nu+m}\big(|w|\big)}{|w|^\nu}C_m^\nu\left(\frac{\mathrm{Re}\,\langle z,w\rangle}{|z|\,|w|}\right),\ \nu>0,\tag{9}$$

$$Z_0\big(|z-w|\big)=Z_0\big(|z|\big)J_0\big(|w|\big)+2\sum_{m=1}^{\infty}Z_m\big(|z|\big)J_m\big(|w|\big)T_m\left(\frac{\mathrm{Re}\,\langle z,w\rangle}{|z|\,|w|}\right),\tag{10}$$

В формулах (9), (10) предполагается, что $z,w\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}$ и $|z|>|w|$ (см. [17, гл. 7, §§ 7.2.8, 7.10.4, 7.11, 7.13.1, 7.15]).

Кроме того, нам потребуется формула Стокса

$$\int_{\partial D}f(z)\,\Omega_\alpha(z)=\int_D\frac{\partial f}{\partial\overline{z}_\alpha}\,d\overline{z}\wedge dz\quad(\alpha=1,\dots,n)\tag{11}$$

и следующая теорема о среднем: если функция h непрерывна на открытом множестве $\mathcal{O}\subset\mathbb{C}^n$ и $\lambda\in\mathbb{C}$, то $\Delta h=-\lambda^2 h$ в $\mathcal{O}$ тогда и только тогда, когда

$$\int_{\mathcal{B}_r^{2n}(w)}h(z)\,d\overline{z}\wedge dz=\left(\frac{4\pi i r}{\lambda}\right)^n J_n(\lambda r)h(w)\tag{12}$$

для любого шара $\mathcal{B}_r^{2n}(w)$, такого что $\overline{\mathcal{B}_r^{2n}}(w)\subset\mathcal{O}$ (см., например, [6, часть 1, § 7.2]).

Пусть $n\geq 2$, $p,q\in\mathbb{Z}_+$, $H^{n,p,q}$ — векторное пространство всех гармонических однородных многочленов в $\mathbb{C}^n$, имеющих полную степень p по переменным $z_1,\dots,z_n$ и полную степень q по переменным $\overline{z}_1,\dots,\overline{z}_n$. Отметим, что

$$A_{p,q}(z)=z_1^p\overline{z}_2^q\in H^{n,p,q}.\tag{13}$$

Обозначим через $\mathcal{H}^{n,p,q}$ — пространство сферических гармоник бистепени (p,q) на единичной сфере $\mathcal{S}_1^{2n-1}$, т.е. пространство сужений $H^{n,p,q}$ на $\mathcal{S}_1^{2n-1}$. Как известно [18, теоремы 12.2.7, 12.2.8], квазирегулярное представление унитарной группы $U(n)$ в $L^2(\mathcal{S}_1^{2n-1})$ является прямой суммой попарно неэквивалентных неприводимых унитарных представлений, действующих на $\mathcal{H}^{n,p,q}$.

Размерность $d(n,p,q)$ пространства $\mathcal{H}^{n,p,q}$ вычисляется по формуле

$$d(n,p,q) = \frac{(p+n-2)!\,(q+n-2)!\,(p+q+n-1)}{p!\,q!\,(n-1)!\,(n-2)!}$$

(см. [19, гл. 12, § 12.2]). Обозначим через $\{S_l^{p,q}\}$, $l \in \{1,\dots,d(n,p,q)\}$, — фиксированный ортонормированный базис в $\mathcal{H}^{n,p,q}$. Функции $S_l^{p,q}$ можно продолжить до многочленов на $\mathbb{C}^n$, используя соотношение $S_l^{p,q}(z) = \rho^{p+q} S_l^{p,q}(\sigma)$, где $\rho = |z|$, $\sigma = z/|z|$.

Ряд Фурье функции $f \in C(\mathcal{B}_{a,b}^{2n})$ по сферическим гармоникам бистепени (p,q) имеет вид

$$f(z) \sim \sum_{p,q=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{d(n,p,q)} f^{p,q,l}(z), \quad z \in \mathcal{B}_{a,b}^{2n}, \tag{14}$$

где $f^{p,q,l}(z) = f_{p,q,l}(\varrho) S_l^{p,q}(\sigma)$,

$$f_{p,q,l}(\varrho) = \int_{\mathcal{S}_1^{2n-1}} f(\varrho\sigma)\overline{S_l^{p,q}(\sigma)}d\sigma, \quad a < \rho < b.$$

Если $f \in C^\infty(\mathcal{B}_{a,b}^{2n})$, то ряд в правой части (14) сходится к f в пространстве $C^\infty(\mathcal{B}_{a,b}^{2n})$.

Случай $n = 1$ обладает определенной спецификой. При этом будем использовать обычный ряд Фурье

$$f(z) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} f^k(z), \tag{15}$$

где $f^k(z) = f_k(\rho)e^{ik\varphi}$ (ρ, φ — полярные координаты точки $z \in \mathbb{C}$),

$$f_k(\rho) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\rho e^{i\varphi})e^{-ik\varphi}d\varphi. \tag{16}$$

Определим дифференциальный оператор $\mathfrak{D}(m)$ по формуле

$$\big(\mathfrak{D}(m)\,h\big)(\varrho) = h'(\rho) - \frac{m}{\rho}\,h(\rho) = \rho^m \frac{d}{d\rho}\big(\rho^{-m}h(\rho)\big), \quad m \in \mathbb{Z}. \tag{17}$$

Нетрудно видеть, что

$$(\Delta f)^{p,q,l} = \Delta(f^{p,q,l}), \quad (\Delta f)_{p,q,l} = \mathfrak{D}(1-2n-p-q)\,\mathfrak{D}(p+q) f_{p,q,l}. \tag{18}$$

Если $n = 1$, то

$$(\Delta f)^k = \Delta(f^k), \quad (\Delta f)_k = \mathfrak{D}(-1-k)\,\mathfrak{D}(k) f_k. \tag{19}$$

§ 4. Интегралы по сфере

Лемма 1. *Пусть $\lambda > 0$. Тогда:*

1) если $n = 1$, то

$$\int_{\mathcal{S}_r^1(w)} Z_k(\lambda\rho)e^{ik\varphi}\,dz = -2\pi i r J_1(\lambda r) Z_{k+1}(\lambda|w|)e^{i(k+1)\arg w}; \tag{20}$$

2) если $n \geq 2$, то

$$\int_{\mathcal{S}_r^{2n-1}(w)} \rho^{1-n} Z_{n+p+q-1}(\lambda\rho) S_l^{p,q}(\sigma)\,\Omega_\alpha(z) = \left(\frac{4\pi i r}{\lambda}\right)^n J_n(\lambda r) f(w), \tag{21}$$

где

$$f(z) = \frac{Z_{n+p+q-1}(\lambda\rho)}{\rho^{n+p+q-1}} \frac{\partial}{\partial \overline{z}_\alpha} \left(S_l^{p,q}(z)\right) - \frac{\lambda Z_{n+p+q}(\lambda\rho)}{2\rho^{n+p+q}} z_\alpha S_l^{p,q}(z).$$

В равенствах (20), (21) предполагается, что $w \in \mathbb{C}^n$ и $w \in \mathbb{C}^n \backslash \{\overline{\mathcal{B}_r^{2n}}\}$ для $Z_\nu = J_\nu$ и $Z_\nu = N_\nu$ соответственно.

Доказательство. 1) Формулы (19) и (3) влекут равенство

$$\Delta\left(Z_k(\lambda\rho)e^{ik\varphi}\right) = -\lambda^2 Z_k(\lambda\rho)e^{ik\varphi}, \quad z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}. \tag{22}$$

В случае $Z_k = J_k$ соотношение (22) справедливо всюду на $\mathbb{C}$, поскольку

$$J_k(\lambda\rho)e^{ik\varphi} = \frac{i^k}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-i\lambda \mathrm{Re}\,(ze^{-i\theta})} e^{ik\theta} d\theta$$

(см., например, [17, гл. 7, § 7.3.1]). Далее, в силу второй формулы в (3) имеем

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left(Z_k(\lambda\rho)e^{ik\varphi}\right) = \frac{1}{2}\,\mathfrak{D}(k)\left(Z_k(\lambda\rho)\right)e^{i(k+1)\varphi} = -\frac{\lambda}{2}\,Z_{k+1}(\lambda\rho)e^{i(k+1)\varphi}.$$

Отсюда и из (11), (12), (22) получаем (20).

2) Как и выше, требуемое утверждение следует из (11), (12) и равенства

$$\Delta h = -\lambda^2 h, \quad \text{где} \quad h(z) = \rho^{1-n} Z_{n+p+q-1}(\lambda\rho) S_l^{p,q}(\sigma)$$

(см. (18), (3), а также [20, § 3, лемма 3.6]). □

Лемма 2. *Пусть* $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n) \in \mathcal{S}_1^{2n-1}$. *Тогда:*

1) если $n = 1$, *то*

$$\int_{\mathcal{S}_r^1} T_m\left(\frac{\mathrm{Re}\,(z\overline{\eta})}{|z|}\right) dz = \begin{cases} 0, & m \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{1\} \\ \pi i r \eta, & m = 1 \end{cases}; \tag{23}$$

2) если $n \geq 2$, *то*

$$\int_{\mathcal{S}_r^{2n-1}} C_m^{n-1}\left(\frac{\mathrm{Re}\,\langle z, \eta\rangle}{|z|}\right) \Omega_\alpha(z) = \begin{cases} 0, & m \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{1\} \\ \dfrac{(2\pi i)^n (n-1) r^{2n-1}}{n!}\eta_\alpha, & m = 1 \end{cases}. \tag{24}$$

Доказательство. 1) Полагая $\eta = e^{i\theta}$, имеем

$$\int_{\mathcal{S}_r^1} T_m\left(\frac{\mathrm{Re}\,(z\overline{\eta})}{|z|}\right) dz = ir\int_{-\pi}^{\pi} T_m\left(\mathrm{Re}\left(e^{i(t-\theta)}\right)\right) e^{it}dt =$$

$$= ire^{i\theta}\int_{-\pi}^{\pi} T_m(\cos t)\, e^{it}dt = ire^{i\theta}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mt)\cos t dt.$$

Отсюда и из ортогональности тригонометрической системы следует (23).

2) Интеграл в левой части (24) можно записать в виде

$$\int_{\mathcal{S}_r^{2n-1}} C_m^{n-1}\left(\frac{\mathrm{Re}\,\langle z, \eta\rangle}{|z|}\right) \Omega_\alpha(z) = \frac{1}{r^m}\int_{\mathcal{S}_r^{2n-1}} H_m(z)\Omega_\alpha(z),$$

где

$$H_m(z) = |z|^m C_m^{n-1}\left(\frac{\mathrm{Re}\,\langle z, \eta\rangle}{|z|}\right).$$

Функция H_m является однородным гармоническим многочленом степени m в $\mathbb{C}^n$ (см. [17, § 11.2]). Поэтому из (11) и теоремы о среднем для гармонических функций находим

$$\int_{\mathcal{S}_r^{2n-1}} C_m^{n-1}\left(\frac{\mathrm{Re}\,\langle z, \eta\rangle}{|z|}\right) \Omega_\alpha(z) = \frac{1}{r^m}\int_{\mathcal{B}_r^{2n}} \frac{\partial H_m}{\partial \overline{z}_\alpha}\, d\overline{z} \wedge dz =$$

$$= \frac{(2\pi i)^n r^{2n-m}}{n!}\frac{\partial H_m}{\partial \overline{z}_\alpha}(0).$$

Это соотношение и равенства

$$H_1(z) = 2(n-1)\mathrm{Re}\,\langle z, \eta\rangle, \quad \frac{\partial H_1}{\partial \overline{z}_\alpha} = (n-1)\eta_\alpha$$

влекут (24). □

Лемма 3. *Пусть* $\lambda > 0$ *и* $w \in \mathcal{B}_r^{2n}$. *Тогда*

$$\int_{\mathcal{S}_r^{2n-1}(w)} \frac{N_{n-1}(\lambda|z|)}{|z|^{n-1}}\,\Omega_\alpha(z) = -\left(\frac{2}{\lambda}\right)^{n-1}(2\pi i r)^n N_n(\lambda r) J_n(\lambda|w|)|w|^{-n} w_\alpha. \tag{25}$$

Доказательство. Можно считать, что $w \in \mathcal{B}_{0,r}^{2n}$. Если $n \geq 2$, то используя (9) и (24), имеем

$$\int_{\mathcal{S}_r^{2n-1}} \frac{N_{n-1}(\lambda|z-w|)}{(\lambda|z-w|)^{n-1}}\,\Omega_\alpha(z) = \left(\frac{2}{\lambda^2}\right)^{n-1}(2\pi i r)^n N_n(\lambda r) J_n(\lambda|w|)|w|^{-n} w_\alpha.$$

Отсюда получаем (25) при $n \geq 2$. Аналогично, если $n = 1$, то (25) следует из (10) и (23). □

§ 5. Класс $H_r(\mathcal{B}_{0,R}^{2n})$ и его инвариантные свойства

Пусть $R > 0$, $r \in (0, R)$. Обозначим через $H_r(\mathcal{B}_{0,R}^{2n})$ множество всех функций $f \in C^\infty(\mathcal{B}_{0,R}^{2n})$, таких, что при любом $w \in \mathcal{B}_{R-r}^{2n} \backslash \mathcal{S}_r^{2n-1}$ выполнены равенства

$$\int_{\mathcal{S}_r^{2n-1}(w)} f(z)\,\Omega_\alpha(z) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, n. \tag{26}$$

Поскольку

$$\int_{\mathcal{S}_r^{2n-1}(w)} f(z)\,\Omega_\alpha(z) = \int_{\mathcal{S}_r^{2n-1}} f(z+w)\,\Omega_\alpha(z),$$

класс $H_r(\mathcal{B}_{0,R}^{2n})$ инвариантен относительно операторов $\dfrac{\partial}{\partial z_\beta}$ и $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}_\beta}$, $\beta \in \{1, \dots, n\}$.

Лемма 4. (i) *Пусть* $f \in C^\infty(\mathcal{B}_{0,R}^2)$. *Тогда* $f \in H_r(\mathcal{B}_{0,R}^2)$ *в том и только том случае, когда* $f^k \in H_r(\mathcal{B}_{0,R}^2)$ *для любого* $k \in \mathbb{Z}$.

(ii) *Пусть* $n \geq 2$ *и* $f \in C^\infty(\mathcal{B}_{0,R}^{2n})$. *Тогда* $f \in H_r(\mathcal{B}_{0,R}^{2n})$ *в том и только том случае, когда* $f_{p,q,j}(\varrho) S_l^{p,q}(\sigma) \in H_r(\mathcal{B}_{0,R}^{2n})$ *для всех* $p, q \in \mathbb{Z}_+$, $l, j \in \{1, \dots, d(n,p,q)\}$.

Доказательство. (i) Из (15) и (16) имеем

$$f^k(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(ze^{it}) e^{-ikt} dt.$$

Поэтому

$$\int_{\mathcal{S}_r^1(w)} f^k(z)\,dz = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{\mathcal{S}_r^1(e^{it}w)} f(z)\,dz\, e^{-i(k+1)t} dt.$$

Отсюда и из (15) получаем утверждение (i).

(ii) Положим

$$t^{p,q}_{l,j}(\tau) = \int_{\mathcal{S}^{2n-1}_1} S^{p,q}_j(\tau^{-1}\sigma)\overline{S^{p,q}_l(\sigma)}d\sigma, \quad \tau \in U(n).$$

Тогда (см. [19, предложение 12.3])

$$f_{p,q,j}(\varrho)S^{p,q}_l(\sigma) = d(n,p,q)\int_{U(n)} f(\tau^{-1}z)\overline{t^{p,q}_{l,j}(\tau)}\,d\tau,$$

где $d\tau$ — нормированная мера Хаара на группе $U(n)$. Это соотношение показывает, что $f_{p,q,j}(\varrho)S^{p,q}_l(\sigma) \in C^\infty(\mathcal{B}^2_{0,R})$. Кроме того,

$$\int_{\mathcal{S}^{2n-1}_r(w)} f_{p,q,j}(\varrho)S^{p,q}_l(\sigma)\,\Omega_\alpha(z) = d(n,p,q)\int_{U(n)}\int_{\mathcal{S}^{2n-1}_r(\tau^{-1}w)} f(z)\Omega_\alpha(\tau z)\overline{t^{p,q}_{l,j}(\tau)}\,d\tau$$

$$= d(n,p,q)\sum_{\beta=1}^{n}\int_{U(n)} a_{\beta\alpha}\int_{\mathcal{S}^{2n-1}_r(\tau^{-1}w)} f(z)\,\Omega_\beta(z)\,\overline{t^{p,q}_{l,j}(\tau)}\,d\tau, \tag{27}$$

где $(a_{1\alpha},\ldots,a_{n\alpha})$ — α-строка матрицы τ в стандартном базисе $\mathbb{C}^n$. Отсюда и из (14) получаем утверждение (ii). $\square$

Лемма 5. (i) *Если $h(\rho)e^{ik\varphi} \in H_r(\mathcal{B}^2_{0,R})$, то функции*

$$\big(\mathfrak{D}(-k)\,h\big)(\varrho)e^{i(k-1)\varphi} \quad \text{и} \quad \big(\mathfrak{D}(k)\,h\big)(\varrho)e^{i(k+1)\varphi}$$

также принадлежат классу $H_r(\mathcal{B}^2_{0,R})$.

(ii) *Пусть $n \geq 2$ и $h(\rho)S^{p,q}_l(\sigma) \in H_r(\mathcal{B}^{2n}_{0,R})$. Тогда:*

1) $\big(\mathfrak{D}(2-2n-p-q)\,h\big)(\varrho)S^{p-1,q}_j(\sigma) \in H_r(\mathcal{B}^{2n}_{0,R})$, если $p \geq 1$, $j \in \{1,\ldots, d(n,p-1,q)\}$;

2) $\big(\mathfrak{D}(2-2n-p-q)\,h\big)(\varrho)S^{p,q-1}_j(\sigma) \in H_r(\mathcal{B}^{2n}_{0,R})$, если $q \geq 1$, $j \in \{1,\ldots, d(n,p,q-1)\}$;

3) $\big(\mathfrak{D}(p+q)\,h\big)(\varrho)S^{p+1,q}_j(\sigma) \in H_r(\mathcal{B}^{2n}_{0,R})$ для любого $j \in \{1,\ldots,d(n,p+1,q)\}$;

4) $\big(\mathfrak{D}(p+q)\,h\big)(\varrho)S^{p,q+1}_j(\sigma) \in H_r(\mathcal{B}^{2n}_{0,R})$ для любого $j \in \{1,\ldots,d(n,p,q+1)\}$.

Доказательство. Утверждение (i) следует из равенств

$$2\frac{\partial}{\partial z}\big(h(\rho)e^{ik\varphi}\big) = \big(\mathfrak{D}(-k)\,h\big)(\varrho)e^{i(k-1)\varphi}, \quad 2\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\big(h(\rho)e^{ik\varphi}\big) = \big(\mathfrak{D}(k)\,h\big)(\varrho)e^{i(k+1)\varphi}.$$

Докажем (ii). Положим

$$f(z) = \frac{h(\rho)}{\rho^{p+q}}A_{p,q}(z), \quad A(z) = \overline{z}_1 A_{p,q}(z) - \frac{\rho^2}{n+p+q-1}\frac{\partial A_{p,q}}{\partial z_1},$$

где многочлен $A_{p,q}$ определяется равенством (13). Из условия и леммы 4 (ii) следует, что $f \in H_r(\mathcal{B}^{2n}_{0,R})$. В силу инвариантности класса $H_r(\mathcal{B}^{2n}_{0,R})$ относительно дифференцирований функции

$$2\frac{\partial f}{\partial z_1} = \frac{p}{n+p+q-1}\big(\mathfrak{D}(2-2n-p-q)\,h\big)(\varrho)A_{p-1,q}(\sigma) + \big(\mathfrak{D}(p+q)\,h\big)(\varrho)A(\sigma), \tag{28}$$

$$2\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_1} = \big(\mathfrak{D}(p+q)\,h\big)(\varrho)A_{p+1,q}(\sigma) \tag{29}$$

также принадлежат $H_r(\mathcal{B}^{2n}_{0,R})$. Учитывая, что

$$A(\sigma) \in \bigoplus_{m_1+m_2=p+q+1} \mathcal{H}^{n,m_1,m_2}$$

(см. [21, гл. 9, § 2, п. 3, формула (5)], [18, гл. 12, § 12.2, предложение 12.2.2]), из (28), (29) и леммы 4 (ii) получаем утверждения 1), 3). Утверждения 2) и 4) доказываются аналогично. □

§ 6. Описание $H_r(\mathcal{B}^{2n}_{0,R})$ при $R > 2r$

Сначала рассмотрим случай $n = 1$.

Лемма 6. *Пусть $0 \le a < b$, $0 < r < (b-a)/2$, $f \in C^\infty(\mathcal{B}^2_{a,b})$. Тогда для того, чтобы*

$$\int_{\mathcal{S}^1_r(w)} f(z)\,dz = 0 \quad \text{на} \quad \mathcal{B}^2_{a+r,b-r}, \tag{30}$$

необходимо и достаточно, чтобы при всех $k \in \mathbb{Z}$ имело место равенство

$$f_k(\rho) = a_k\rho^k + \sum_{m=1}^{\infty} b_{m,k}J_k\Big(\frac{\xi_{1,m}}{r}\rho\Big) + c_{m,k}N_k\Big(\frac{\xi_{1,m}}{r}\rho\Big), \quad a<\rho<b, \tag{31}$$

где $a_k, b_{m,k}, c_{m,k} \in \mathbb{C}$ и $|b_{m,k}| + |c_{m,k}| = O\big(\xi_{1,m}^{-s}\big)$ при $m \to \infty$ для любого $s > 0$.

Доказательство. Предположим, что функция f удовлетворяет условию (30). Тогда в силу (11) ее производная $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}$ имеет нулевые интегралы по всем замкнутым кругам радиуса r, лежащим в $\mathcal{B}^2_{a,b}$. Поэтому при всех $k \in \mathbb{Z}$

$$\Big(\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\Big)_k(\rho) = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{m,k}J_k\Big(\frac{\xi_{1,m}}{r}\rho\Big) + \beta_{m,k}N_k\Big(\frac{\xi_{1,m}}{r}\rho\Big), \quad a<\rho<b,$$

где $\alpha_{m,k}, \beta_{m,k} \in \mathbb{C}$ и $|\alpha_{m,k}| + |\beta_{m,k}| = O\big(\xi_{1,m}^{-s}\big)$ при $m \to \infty$ для любого $s > 0$ (см. [22, теорема 3]). Учитывая, что

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right)_k(\rho) = \frac{\rho^{k-1}}{2}\frac{d}{d\rho}\big(\rho^{1-k} f_{k-1}(\rho)\big),$$

приходим к разложению

$$\frac{d}{d\rho}\big(\rho^{-k} f_k(\rho)\big) = 2\rho^{-k}\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{m,k+1} J_{k+1}\Big(\frac{\xi_{1,m}}{r}\rho\Big) + \beta_{m,k+1} N_{k+1}\Big(\frac{\xi_{1,m}}{r}\rho\Big), \quad a < \rho < b.$$

Отсюда и из (3), (6)–(8) находим

$$f_k(\rho) = a_k\rho^k - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2r}{\xi_{1,m}}\left(\alpha_{m,k+1} J_k\Big(\frac{\xi_{1,m}}{r}\rho\Big) + \beta_{m,k+1} N_k\Big(\frac{\xi_{1,m}}{r}\rho\Big)\right).$$

Тем самым разложение (31) доказано. Обратно, если компоненты f_k функции f имеют вид (31), то из (20) заключаем, что при всех $k \in \mathbb{Z}$

$$\int_{\mathcal{S}_r^1(w)} f^k(z)\, dz = 0, \quad w \in \mathcal{B}^2_{a+r,b-r}.$$

Следовательно, функция f удовлетворяет условию (30). □

Лемма 7. *Пусть $R > 2r$, $k \in \mathbb{Z}$, $a, b \in \mathbb{C}$. Тогда:*
(i) $\overline{z}^k \in H_r(\mathcal{B}^2_{0,R}) \Leftrightarrow k = 0$;
(ii) $\overline{z}z^k \notin H_r(\mathcal{B}^2_{0,R})$;
(iii) $a\overline{z} + bz^{-1} \in H_r(\mathcal{B}^2_{0,R}) \Leftrightarrow a = 0,\ b = 0$.

Доказательство. Пусть $w \in \mathcal{B}^2_{r,R-r}$. Используя (11) и теорему о среднем для гармонических функций, находим

$$\int_{\mathcal{S}_r^1(w)} \overline{z}^k dz = k\int_{\mathcal{B}_r^2(w)} \overline{z}^{k-1} d\overline{z} \wedge dz = 2\pi i k\, r^2\, \overline{w}^{k-1},$$

$$\int_{\mathcal{S}_r^1(w)} \overline{z}z^k dz = \int_{\mathcal{B}_r^2(w)} z^k d\overline{z} \wedge dz = 2\pi i\, r^2 w^k,$$

$$\int_{\mathcal{S}_r^1(w)} (a\overline{z} + bz^{-1}) dz = 2\pi i a\, r^2.$$

Из первых двух равенств и определения класса $H_r(\mathcal{B}^2_{0,R})$ сразу следуют утверждения (i) и (ii). Для доказательства (iii) достаточно воспользоваться третьим равенством и соотношением

$$\int_{\mathcal{S}_r^1(w)} bz^{-1} dz = 2\pi i b, \quad w \in \mathcal{B}_r^2.$$

□

Лемма 8. *Пусть $R > 2r$ и $f(z) = f_0(\rho) \in H_r(\mathcal{B}^2_{0,R})$. Тогда*

$$f_0(\rho) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m J_0\Big(\frac{\xi_{1,m}}{r}\rho\Big), \quad 0 < \rho < R, \tag{32}$$

где $a_0, a_m \in \mathbb{C}$ и $a_m = O\big(\xi_{1,m}^{-s}\big)$ при $m \to \infty$ для любого $s > 0$.

Доказательство. Применяя лемму 6 при $a = 0$, $b = R$, имеем

$$f_0(\rho) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m J_0\Big(\frac{\xi_{1,m}}{r}\rho\Big) + b_m N_0\Big(\frac{\xi_{1,m}}{r}\rho\Big), \quad 0 < \rho < R,$$

где $a_0, a_m, b_m \in \mathbb{C}$ и $|a_m| + |b_m| = O\big(\xi_{1,m}^{-s}\big)$ при $m \to \infty$ для любого $s > 0$. Используем теперь условие

$$\int_{\mathcal{S}^1_r(w)} f(z)\, dz = 0, \quad w \in \mathcal{B}^2_r.$$

Полагая $t = |w|/r$, с учетом (6)–(8), (20) и (25) находим

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m N_1(\xi_{1,m}) J_1(\xi_{1,m} t) = 0, \quad 0 < t < 1. \tag{33}$$

Отсюда и из соотношений ортогональности (5) следует, что $b_m N_1(\xi_{1,m}) = 0$, $m \in \mathbb{N}$. Тогда все b_m равны нулю (см. (4)). Тем самым разложение (32) доказано. $\square$

Теорема 2. *Пусть $R > 2r$, $f \in C^{\infty}(\mathcal{B}^2_{0,R})$. Тогда для того, чтобы $f \in H_r(\mathcal{B}^2_{0,R})$, необходимо и достаточно, чтобы для любых $k \in \mathbb{Z}$ имело место равенство*

$$f_k(\rho) = a_k \rho^k + \sum_{m=1}^{\infty} b_{m,k} J_k\Big(\frac{\xi_{1,m}}{r}\rho\Big), \quad 0 < \rho < R, \tag{34}$$

где $a_k, b_{m,k} \in \mathbb{C}$, $a_{-1} = 0$ и $b_{m,k} = O\big(\xi_{1,m}^{-s}\big)$ при $m \to \infty$ для любого $s > 0$.

Доказательство. Если $f \in C^{\infty}(\mathcal{B}^2_{0,R})$ и выполнено разложение (34), то все f^k принадлежат классу $H_r(\mathcal{B}^2_{0,R})$ (см. (6), (7), (20)). Поэтому $f \in H_r(\mathcal{B}^2_{0,R})$.

Далее, докажем индукцией, что если некоторая функция $h(\rho)e^{ik\varphi}$ принадлежит классу $H_r(\mathcal{B}^2_{0,R})$, то h можно представить рядом вида (34). В случае $k = 0$ это утверждение следует из леммы 8. Предположим, что оно справедливо при некотором $k \geq 0$ и установим его для $k+1$. Пусть $h(\rho)e^{i(k+1)\varphi} \in H_r(\mathcal{B}^2_{0,R})$. Тогда в силу леммы 5 (i),

$$\rho^{-k-1}\frac{d}{d\rho}\big(\rho^{k+1}h(\rho)\big) = a_k\rho^k + \sum_{m=1}^{\infty} b_{m,k}J_k\Big(\frac{\xi_{1,m}}{r}\rho\Big).$$

Отсюда находим (см. (3))

$$h(\rho) = \frac{a_k}{2k+2}\rho^{k+1} + c_k\rho^{-k-1} + r\sum_{m=1}^{\infty}\frac{b_{m,k}}{\xi_{1,m}}J_{k+1}\Big(\frac{\xi_{1,m}}{r}\rho\Big),$$

где $c_k \in \mathbb{C}$. Это представление, соотношение (20) и лемма 7 (i) влекут равенство $c_k = 0$, которое завершает индукционный переход от k к $k+1$ при $k \geq 0$. Аналогично устанавливается справедливость индукционного перехода от k к $k-1$ при $k \leq 0$ (см. лемму 5 (i) и лемму 7 (ii) (iii)), что и требовалось.

Теперь из леммы 4 (i) получаем (34) для $f \in H_r(\mathcal{B}^2_{0,R})$. Таким образом, теорема 2 доказана. □

Перейдем теперь к случаю $n \geq 2$.

Лемма 9. *Пусть* $n \geq 2$, $0 \leq a < b$, $0 < r < (b-a)/2$ *и* $f \in C^\infty(\mathcal{B}^{2n}_{a,b})$. *Тогда для того чтобы условие (26) выполнялось для* $w \in \mathcal{B}^{2n}_{a+r,b-r}$, *необходимо и достаточно, чтобы при всех* $p, q \in \mathbb{Z}_+$, $l \in \{1, \ldots, d(n,p,q)\}$ *имело место равенство*

$$f_{p,q,l}(\rho) = a_{p,q,l}\rho^{p+q} + \rho^{1-n}\sum_{m=1}^{\infty} b_{m,p,q,l}J_{n+p+q-1}\Big(\frac{\xi_{n,m}}{r}\rho\Big) +$$

$$+ c_{m,p,q,l}N_{n+p+q-1}\Big(\frac{\xi_{n,m}}{r}\rho\Big), \quad a < \rho < b, \tag{35}$$

где $a_{p,q,l}, b_{m,p,q,l}, c_{m,p,q,l} \in \mathbb{C}$, $a_{p,q,l} = 0$ *при* $q \geq 1$ *и* $|b_{m,p,q,l}| + |c_{m,p,q,l}| = O\big(\xi_{n,m}^{-s}\big)$ *при* $m \to \infty$ *для любого* $s > 0$.

Доказательство. Предположим, что $f \in C^\infty(\mathcal{B}^{2n}_{a,b})$ и для любого $w \in \mathcal{B}^{2n}_{a+r,b-r}$ выполнены равенства (26). Тогда это же справедливо и для всех функций $f_{p,q,l}(\rho)A_{p,q}(\sigma)$ (см. (27)). Отсюда и из (11) следует, что функция

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_1}\big(f_{p,q,l}(\rho)A_{p,q}(\sigma)\big) = \frac{1}{2}\big(\mathfrak{D}(p+q)\,f_{p,q,l}\big)(\varrho)A_{p+1,q}(\sigma)$$

имеет нулевые интегралы по всем замкнутым шарам радиуса r, лежащим в $\mathcal{B}^{2n}_{a,b}$. Теперь, повторяя рассуждения из доказательства леммы 6, получаем (35), где $a_{p,q,l}, b_{m,p,q,l}, c_{m,p,q,l} \in \mathbb{C}$ и $|b_{m,p,q,l}| + |c_{m,p,q,l}| = O\big(\xi_{n,m}^{-s}\big)$ при $m \to \infty$ для любого $s > 0$. Учитывая, что

$$\int_{\mathcal{S}_r^{2n-1}(w)} A_{p,q}(z)\,\Omega_2(z) = \int_{\mathcal{B}_r^{2n}(w)} \frac{\partial A_{p,q}}{\partial \overline{z}_2}\, d\overline{z} \wedge dz =$$

$$= \frac{(2\pi i r^2)^n}{n!} \frac{\partial A_{p,q}}{\partial \overline{z}_2}(w) = q \frac{(2\pi i r^2)^n}{n!} A_{p,q-1}(w) \qquad (36)$$

и используя (21), приходим к равенству $q a_{p,q,l} = 0$. Достаточность в лемме следует из (21) и (14). $\square$

Лемма 10. *Пусть $n \geq 2$, $R > 2r$, $a, b \in \mathbb{C}$ и $f(z) = (a\rho^{p+q} + b\rho^{2-2n-p-q}) S_l^{p,q}(\sigma)$. Тогда $f \in H_r(\mathcal{B}^{2n}_{0,R})$ лишь в случае, когда $aq = 0$, $b = 0$.*

Доказательство. Пусть $w \in \mathcal{B}^{2n}_{r,R-r}$. Если $f \in H_r(\mathcal{B}^{2n}_{0,R})$, то по лемме 4 (ii) функция

$$F(z) = (a + b|z|^{2(1-n-p-q)}) A_{p,q}(z)$$

также принадлежит $H_r(\mathcal{B}^{2n}_{0,R})$ (см. (13)). При этом равенства (17), (18) показывают, что F является гармонической вне нуля. Поэтому используя (11) и теорему о среднем для гармонических функций, имеем

$$0 = \int_{\mathcal{S}_r^{2n-1}(w)} F(z)\,\Omega_1(z) = \int_{\mathcal{B}_r^{2n}(w)} \frac{\partial F}{\partial \overline{z}_1}\, d\overline{z} \wedge dz =$$

$$= \frac{(2\pi i r^2)^n}{n!} \frac{\partial F}{\partial \overline{z}_1}(w) = b(1-n-p-q) \frac{(2\pi i r^2)^n}{n!} \frac{A_{p+1,q}(w)}{|w|^{2(n+p+q)}}.$$

Следовательно, $b = 0$ и, значит, $F(z) = aA_{p,q}(z)$. Теперь из условия

$$\int_{\mathcal{S}_r^{2n-1}(w)} F(z)\,\Omega_2(z) = 0$$

находим $aq = 0$ (см. (36)). Обратно, если $aq = 0$ и $b = 0$, то функция f голоморфна на $\mathbb{C}^n$ и удовлетворяет (26) для всех $w \in \mathbb{C}^n$ и $r > 0$. $\square$

Теорема 3. *Пусть $n \geq 2$, $R > 2r$, $f \in C^\infty(\mathcal{B}^{2n}_{0,R})$. Тогда для того, чтобы $f \in H_r(\mathcal{B}^{2n}_{0,R})$, необходимо и достаточно, чтобы для всех $p, q \in \mathbb{Z}_+$, $l \in \{1, \ldots, d(n,p,q)\}$ имело место равенство*

$$f_{p,q,l}(\rho) = a_{p,q,l}\rho^{p+q} + \rho^{1-n} \sum_{m=1}^{\infty} b_{m,p,q,l} J_{n+p+q-1}\Big(\frac{\xi_{n,m}}{r}\rho\Big), \quad 0 < \rho < R,$$

где $a_{p,q,l}, b_{m,p,q,l} \in \mathbb{C}$, $a_{p,q,l} = 0$ при $q \geq 1$ и $b_{m,p,q,l} = O\big(\xi_{n,m}^{-s}\big)$ при $m \to \infty$ для любого $s > 0$.

Доказательство. Требуемое утверждение получается повторением рассуждений из леммы 8 и теоремы 2. При этом используются соотношения (21), (25), а также лемма 4 (ii), лемма 5 (ii) и леммы 9, 10 вместо соответствующих одномерных результатов. □

§ 7. Доказательство теоремы 1

1) Пусть выполнены условия первого утверждения теоремы 1 и $n = 1$. Тогда в силу леммы 4 (i) функция f^0 принадлежит классу $(H_{r_1} \cap H_{r_2})(\mathcal{B}^2_{0,R})$. Поскольку $R > 2r_1$, лемма 8 влечет разложение

$$f_0(\rho) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m J_0\Big(\frac{\xi_{1,m}}{r_1}\rho\Big), \quad 0 < \rho < R,$$

где $a_0, a_m \in \mathbb{C}$ и $a_m = O\big(\xi_{1,m}^{-s}\big)$ при $m \to \infty$ для любого $s > 0$. Используя условия $R \geq r_1 + r_2$ и $f^0 \in H_{r_2}(\mathcal{B}^2_{0,R})$, с учетом (20) находим

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m J_1\left(\frac{r_2 \xi_{1,m}}{r_1}\right) J_1\left(\xi_{1,m} t\right) = 0, \quad 0 < t < 1.$$

Как и в лемме 8, отсюда имеем

$$a_m J_1\left(\frac{r_2 \xi_{1,m}}{r_1}\right) = 0, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Это соотношение и условие $r_1/r_2 \notin \mathcal{E}_1$ показывают, что $a_m = 0$ при всех $m \in \mathbb{N}$, т.е. $f_0(\rho) = a_0$. Теперь, повторяя рассуждения в доказательстве теоремы 2, приходим к равенствам

$$f_k(\rho) = a_k \rho^k, \quad 0 < \rho < R, \quad k \in \mathbb{Z},$$

где $a_k \in \mathbb{C}$ и $a_{-1} = 0$. Поэтому функция f голоморфна в $\mathcal{B}^2_{0,R}$.

В случае $n \geq 2$ аналогично получаем (см. доказательство теоремы 3), что для всех коэффициентов $f_{p,q,l}$ справедливо представление

$$f_{p,q,l}(\rho) = a_{p,q,l} \rho^{p+q}, \quad 0 < \rho < R,$$

где $a_{p,q,l} \in \mathbb{C}$ и $a_{p,q,l} = 0$ при $q \geq 1$. Тогда функция f является голоморфной в $\mathcal{B}^{2n}_R$ (см. (14) и [23, гл. 3, § 11, теорема 3]).

2) Пусть $r_1/r_2 \in \mathcal{E}_n$ или $R < r_1 + r_2$. Тогда из доказательств утверждений 6) и 7) теоремы 1 в [16] видно, что существует ненулевая радиальная функция $f \in C^\infty(\mathcal{B}_R^{2n})$, такая что

$$\int_{\mathcal{B}_{r_j}^{2n}} f(z+w)\, d\overline{z} \wedge dz = 0, \quad w \in \mathcal{B}_{R-r_j}^{2n},\ j \in \{1; 2\}.$$

Отсюда и из (11) заключаем, что f удовлетворяет (2) для любых $w \in \mathcal{B}_{R-r_j}^{2n}$, $j \in \{1; 2\}$, $\alpha \in \{1, \ldots, n\}$. При этом f не является голоморфной в $\mathcal{B}_{0,R}^{2n}$ поскольку не может быть константой. Таким образом, теорема 1 полностью доказана.

Список литературы

1. *Федоров В. С.* Об одном свойстве криволинейных интегралов // *Матем. сб.* 1949. Т. 66, № 1. С. 15–26.

2. *Reade M. O.* A theorem of Fédoroff // *Duke Math. J.* 1951. V. 18. P. 105–109.

3. *Айзенберг Л. А.* Замечание о теореме Морера // *Голоморфные функции многих комплексных переменных* / Красноярск: ИФ СО АН СССР, 1972.

4. *Bondar A. V.* A generalization of the multidimensional Morera theorem // *Ukr. Math. J.*1978. V. 30, N 3, P. 265–269.

5. *Беренстейн К. А., Струппа Д.* Комплексный анализ и уравнения в свёртках // *Современные проблемы матемематики. Фундаментальные направления* / Итоги науки и техники. М.: ВИНИТИ, 1989. Т. 54.

6. *Volchkov V. V.* *Integral Geometry and Convolution Equations* / Dordrecht: Kluwer, 2003.

7. *Myslivets S. G.* On the multidimensional boundary analogue of the Morera theorem // *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.* 2022. V. 15, N 1. P. 29–45.

8. *Volchkov V. V. and Volchkov Vit. V.* Zalcman's problem and related two-radii theorems // *Anal. Math. Phys.* 2023. V. 13, N 5. P. 1–47.

9. *Zalcman L.* Analyticity and the Pompeiu problem // *Arch. Rat. Mech. Anal.* 1972. V. 47. P. 237–254.

10. *Smith J. D.* Harmonic analysis of scalar and vector fields in $\mathbb{R}^n$ // *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 1972. V. 72. P. 403–416.

11. *Brown L., Schreiber B. M. and Taylor B. M.* Spectral synthesis and the Pompeiu problem // *Ann. Inst. Fourier.* 1973. V. 23. P. 125–154.

12. *Berenstein C. A. and Gay R.* A local version of the two-circles theorem // *Israel J. Math.* 1986. V. 55. P. 267–288.

13. *Zalcman L.* A bibliographic survey of the Pompeiu problem // *Approximation by Solutions of Partial Differential Equations* / Dordrecht: Kluwer, 1992. V. 365.

14. *Volchkov V. V. and Volchkov Vit. V. Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces* / Basel: Birkhäuser, 2013.

15. *Williams S. A.* Analyticity of the boundary for Lipschitz domains without the Pompeiu property // *Indiana Univ. Math. J.* 1981. V. 30. P. 357–369.

16. *Волчков В. В.* Окончательный вариант локальной теоремы о двух радиусах // *Матем. сб.* 1995. Т. 186, № 6. С. 15–34.

17. *Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции* / М.: Наука, 1974. Т. II.

18. *Рудин У. Теория функций в единичном шаре из* $\mathbb{C}^n$ / М.: Мир, 1984.

19. *Volchkov V. V. and Volchkov Vit. V. Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group* / London: Springer, 2009.

20. *Хелгасон С. Группы и геометрический анализ* / М.: Мир, 1987.

21. *Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория представлений групп* / 2-е изд. М.: Наука, 1991.

22. *Волчков В. В.* Решение проблемы носителя для некоторых классов функций // *Матем. сб.* 1997. Т. 188, № 9. С. 13–30.

23. *Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ* / Часть II. М.: Наука, 1985.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 2, С. 40-61
Mat. Trudy, 2024, vol. 27, no. 2, pp. 40-61

References

1. *Fedorov V. S.* On a property of line integrals // *Mat. Sbornik N.S.* 1949. V. 24(66), P. 15–26.

2. *Reade M. O.* A theorem of Fédoroff // *Duke Math. J.* 1951. V. 18. P. 105–109.

3. *Aizenberg L. A.* A note on Morera's theorem // *Holomorphic functions of many complex variables* / Krasnoyarsk: Kirensky Institute of Physics, Siberian Branch of USSR Academy of Sciences, 1972.

4. *Bondar A. V.* A generalization of the multidimensional Morera theorem // *Ukr. Math. J.*1978. V. 30, N 3, P. 265–269.

5. *Berenstein C. A., Struppa D. C.* Complex analysis and convolution equations // *Several complex variables.* V*: Complex analysis in partial differential equations and mathematical physics*, 1993. V. 54, P. 1–108.

6. *Volchkov V. V. Integral Geometry and Convolution Equations* / Dordrecht: Kluwer, 2003.

7. *Myslivets S. G.* On the multidimensional boundary analogue of the Morera theorem // *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.* 2022. V. 15, N 1. P. 29–45.

8. *Volchkov V. V. and Volchkov Vit. V.* Zalcman's problem and related two-radii theorems // *Anal. Math. Phys.* 2023. V. 13, N 5. P. 1–47.

9. *Zalcman L.* Analyticity and the Pompeiu problem // *Arch. Rat. Mech. Anal.* 1972. V. 47. P. 237–254.

10. *Smith J. D.* Harmonic analysis of scalar and vector fields in $\mathbb{R}^n$ // *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 1972. V. 72. P. 403–416.

11. *Brown L., Schreiber B. M. and Taylor B. M.* Spectral synthesis and the Pompeiu problem // *Ann. Inst. Fourier.* 1973. V. 23. P. 125–154.

12. *Berenstein C. A. and Gay R.* A local version of the two-circles theorem // *Israel J. Math.* 1986. V. 55. P. 267–288.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 2, С. 40-61
Mat. Trudy, 2024, vol. 27, no. 2, pp. 40-61

13. *Zalcman L.* A bibliographic survey of the Pompeiu problem // *Approximation by Solutions of Partial Differential Equations* / Dordrecht: Kluwer, 1992. V. 365.

14. *Volchkov V. V. and Volchkov Vit. V. Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces* / Basel: Birkhäuser, 2013.

15. *Williams S. A.* Analyticity of the boundary for Lipschitz domains without the Pompeiu property // *Indiana Univ. Math. J.* 1981. V. 30. P. 357–369.

16. *Volchkov V. V.* A definitive version of the local two-radii theorem // *Sb. Math.* 1995. V. 186. N 6. P. 783–802.

17. *Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., and Tricomi F. G. Higher Transcendental Functions*, Vol. II. / New York: McGraw-Hill, 1953.

18. *Rudin W. Function Theory in the Unit Ball of* $\mathbb{C}^n$ / New York: Springer, 1980.

19. *Volchkov V. V. and Volchkov Vit. V. Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group* / London: Springer, 2009.

20. *Helgason S. Groups and Geometric Analysis* / New York: Academic Press, 1984.

21. *Vilenkin N. Ja. Special Functions and the Theory of Group Representations* /RI: AMS, 1968.

22. *Volchkov V. V.* Solution of the support problem for several function classes // *Sb. Math.* 1997. V. 188. N 9. P. 1279–1294.

23. *Shabat B. V. Introduction to Complex Analysis: Functions of Several Variables* / RI: AMS, 1992.

Информация об авторах

Наталья Петровна Волчкова, кандидат физико-математических наук, доцент

SPIN 3469-6807 AuthorID: 852012

Scopus Author ID 6506115527

Виталий Владимирович Волчков, доктор физико-математических наук, профессор

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 2, С. 40-61
Mat. Trudy, 2024, vol. 27, no. 2, pp. 40-61

SPIN 4478-1677 AuthorID: 505219
Scopus Author ID 7006247848

Author Information

Natalya P. Volchkova, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor
SPIN 3469-6807 AuthorID: 852012
Scopus Author ID 6506115527
Vitalii V. Volchkov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
SPIN 4478-1677 AuthorID: 505219
Scopus Author ID 7006247848

Статья поступила в редакцию 30.01.2024; одобрена после рецензирования 20.04.2024; принята к публикации 17.05.2024

The article was submitted 30.01.2024; approved after reviewing 20.04.2024; accepted for publication 17.05.2024